Exercice 1

Solution

1. La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ donc on cherche les réels x vérifiant $\sqrt{x^2+1}-x>0$
   or pour tout réel x, $1+x^2>x^2$
   donc par croissance de la fonction racine carrée, pour tout réel x,
   $$\sqrt{1+x^2}>|x|\geqslant x \text{ c'est-à-dire } \sqrt{1+x^2}-x>0$$
   (on rappelle que pour tout réel a, $\sqrt{a^2}=|a|$)
   D'où $\mathcal{D}=\mathbb{R}$
2. Soit $x\in\mathbb{R}$
   $$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2}\right)=-f(x)$$
   donc f est impaire.
   (on a multiplié par l'expression conjuguée du dénominateur au numérateur et au dénominateur à la troisième égalité)
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0$
   ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
   Enfin par parité (ici la fonction est impaire), $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Exercice 2

Solution

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ car cos est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est 2π- périodique car cos l'est : pour tout réel x, $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - (\cos(x+2\pi))^2 = f(x)$
   On réduit alors l'étude à $[-\pi, \pi]$ on complétera le graphique par translation horizontale.
   De plus f est paire car cos l'est, donc on réduit l'étude à $[0, \pi]$, on complétera par symétrie axiale.
3. f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

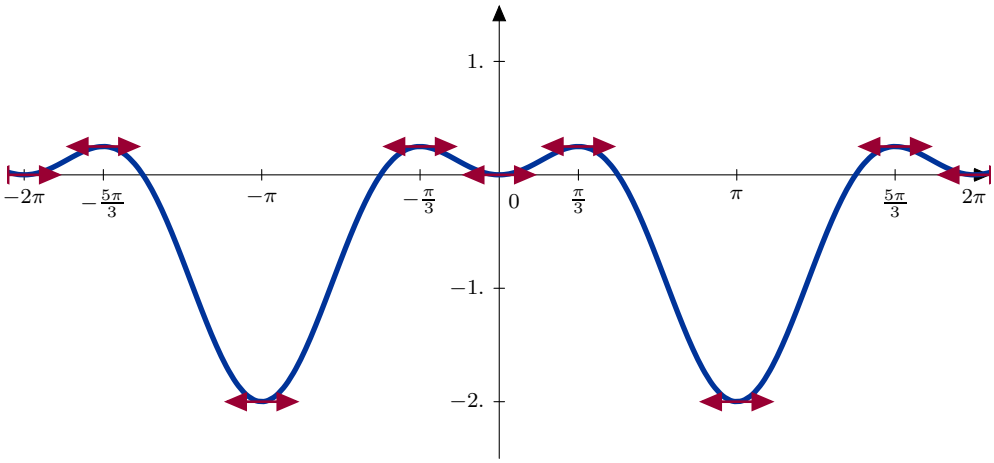
$$f'(x) = -\sin x + 2\cos x \sin x = \sin x(-1 + 2\cos x)$$

   Étude du signe pour tout $x \in [0, \pi]$ $\sin x \geqslant 0$
   et $-1 + 2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

5. $f(0) = 0$, $f(\pi) = -2$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$
6. On en déduit le tableau de variation sur $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-2

Pour finir, on construit la courbe :
- On trace sur $[-2\pi, 2\pi]$ afin de faire apparaître plusieurs périodes, on centre notre repère horizontalement mais on ne prend pas la même échelle sur les deux axes pour plus de praticité. On remarque, par ailleurs que d'après le tableau de variations, les images évolueront entre -2 et $\frac{1}{4}$ donc inutile d'en faire plus.
- On commence le tracé sur $[0, \pi]$ en plaçant les 3 points importants et les tangentes horizontales associées (tangente horizontale = dérivée s'annulant en changeant de signe) puis on trace la courbe sur $[0, \pi]$ en suivant les tangentes horizontales aux points associés.
- Par symétrie axiale, on trace la courbe sur $[-\pi, 0]$
- Par translation, on trace la courbe sur $[-2\pi, -\pi]$ et sur $[\pi, 2\pi]$



Exercice 3

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2(1+2u_n)} - \frac{1+2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{1-2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{\frac{1}{2}-u_n}{1+2u_n}$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$"

   Initialisation : $u_0 = 1$ donc $\frac{1}{3} \leqslant u_0 \leqslant 1$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Ainsi $\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$, d'où $\frac{2}{3} \leqslant 2u_n \leqslant 2$ puis $\frac{5}{3} \leqslant 1+2u_n \leqslant 3$

   Par passage à l'inverse (licite car tous les termes sont strictement positifs), $\frac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+2u_n} \leqslant \frac{3}{5} \leqslant 1$.

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Nous avons montré dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+2u_n} \leqslant \dfrac{3}{5}$,

   donc par la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - u_n\right|}{|1+2u_n|} \leqslant \frac{3}{5}\left|\frac{1}{2} - u_n\right| = \frac{3}{5}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$"

   Initialisation : $u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\left|u_0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \leqslant 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Ainsi $|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
   Par la question 3 et par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{5}|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

5. Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, ainsi par le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{1}{2} = 0$

   donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4

Solution

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
   On pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ alors les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par intégration par parties :
   $$I_{n+1}(x) = [-\mathrm{e}^{-t}t^{n+1}]_0^x - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t}(n+1)t^n \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}x^{n+1} + (n+1)I_n(x)$$
2. **Erreur d'énoncé, la formule est fausse. On peut cependant quand même faire la question suivante.**
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction I_n est définie comme la primitive de $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^n$ s'annulant en 0. Ainsi par définition d'une primitive, I_n est dérivable et $I_n' = f_n$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}_+, I_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}x^n \geqslant 0$ donc la fonction I_n est croissante.
   Par le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle admet une limite en $+\infty$ qui est soit finie, soit égale à $+\infty$. Notons la ℓ_n.

   Ainsi par passage à la limite (quand x tend vers $+\infty$) dans la relation de récurrence, on en déduit $\ell_{n+1} = (n+1)\ell_n$. (on rappelle que par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{n+1} = 0$)

   Posons alors $\mathscr{P}(n)$: "$\ell_n = n!$"

   Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}$, $I_0(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}$
   donc $\ell_0 = \lim\limits_{x\to+\infty} I_0(x) = 1$ et $0! = 1$ par convention donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $\ell_n = n!$
   alors $\ell_{n+1} = (n+1)\ell_n = (n+1) \times n! = (n+1)!$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = n!$

Exercice 5

Solution

1. On cherche le nombre de codes de 5 chiffres de 0 à 9. Chaque chiffre est donc un entier entre 0 et 9, soit 10 possibilités et ceci se répète 5 fois, donc le nombre total de codes possibles est 10^5.
2. (a) On peut raisonner chiffre par chiffre. Pour le premier 10 choix sont possibles, puis le deuxième ne pouvant être égal au premier, il n'en reste que 9. Cela donne donc 10×9 possibilités pour les deux premiers chiffres. Puis de la même manière, 8 possibilités pour le troisième chiffre, etc.
   Finalement, le nombre de possibilités vaut $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$
   (b) On peut utiliser le complémentaire en utilisant la négation. Ici le complémentaire est donc l'ensemble des codes n'ayant que des chiffres distincts, c'est-à-dire le nombre de codes déterminé à la question précédente. Ainsi le nombre de codes ayant au moins 2 chiffres identiques vaut $10^5 - 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$
   (c) Pour chercher ceux qui ne contiennent ni le 0 ni le 9, on revient au même raisonnement qu'à la question 1, on crée donc des codes de 5 chiffres de 1 à 8, soit 8^5 possibilités.
   (d) De même, on reprend le raisonnement de la question 2a, il y a donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ possibilités.
   (e) En notant A l'ensemble des codes de chiffres distincts (dont le nombre a été déterminé en question 2a), B l'ensemble des codes ne contenant ni le 0 ni le 9 (question 2c), on a alors déterminé le nombre d'éléments de l'ensemble $A \cap B$ dans la question 2d.
   Et dans cette question on cherche alors le nombre des éléments de l'ensemble $A \cup B$. Ainsi ce nombre vaut
   $$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 8^5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 56288$$

Exercice 6

Solution **Partie A**

1. $$P(E \cap M) = P(E) \times P_E(M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

2. On utilise la formule des probabilités totales sur la partition de l'univers $(M, \overline{M})$:

$$P(E) = P(E \cap M) + P(E \cap \overline{M}) = P(E \cap M) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(E) = 0,18 + 0,4 \times 0,55 = 0,4$$

3. $$P_E(M) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0,18}{0,4} = 0,45$$

Partie B

1. Les appels sont effectués de manière identique et indépendante. On reconnait alors un schéma de Bernoulli. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,15$.

2. $$P(X = 7) = \binom{80}{7} 0,15^7 (1 - 0,15)^{80-7} \approx 0,038$$

3. $$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \approx 0,999$$

4. On utilise l'espérance $E(X) = np = 12$. En moyenne il réalise 12 souscriptions par jour.