

EXERCICE 1**SOLUTION**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)dx - \int_0^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

Or la fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R} donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes, en particulier la tangente au point d'abscisse 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geq 1$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)dx \geq 0$ et la suite (I_n) est croissante.

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on pose $g(x) = \frac{e^x}{2} - x$

Alors g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = \frac{e^x}{2} - 1$

D'où le tableau de variations :

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	\emptyset	+
g		$1 - \ln 2$	

Puisque $1 - \ln 2 \geq 0$, on obtient alors : pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$

D'où pour tout $x \geq 0$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente, $\frac{1}{e^x - x} \leq \frac{2}{e^x}$

Ainsi, par multiplication, $0 \leq \frac{x}{e^x - x} \leq 2xe^{-x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^n f(x)dx \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$$

(c) H est dérivable par produit sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$:

$$H'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x - 1) \times (-e^{-x}) = xe^{-x}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente :

$$\int_0^n 2xe^{-x}dx = \int_0^n 2H'(x)dx = 2(H(n) - H(0)) = 2(1 - (n+1)e^{-n})$$

Or $(n+1)e^{-n} \geq 0$ donc, par la question 2b, $I_n \leq 2$.

(e) Nous avons démontré à la question 1 que la suite (I_n) est croissante et à la question 2d, que la suite (I_n) est majorée, donc par le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge.

EXERCICE 2**SOLUTION**

1. L'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$
Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ae^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Soient $m, p \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$
alors f est dérivable par produit et pour tout réel x , $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{m}{2}x^2 + (2m - \frac{p}{2})x + p \right)$
Ainsi, pour tout réel x , $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(4mx + 2p)$
Donc, par identification, f est solution de (E') si, et seulement si $4m = 1$ et $2p = 1$ c'est-à-dire si, et seulement si $m = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$.
- (b) — Supposons que g soit une solution de (E') alors g est dérivable et pour tout réel x , $2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$.
Par différence, $g - f$ est dérivable sur \mathbb{R} et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 2g'(x) + g(x) - (2f'(x) + f(x)) = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1) - e^{-\frac{x}{2}}(x + 1) = 0$$

Donc $g - f$ est solution de (E) .

- Supposons que $g - f$ soit une solution de (E) alors $g - f$ est dérivable et pour tout réel x ,
 $2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$
c'est-à-dire pour tout réel x , $2(g'(x) - f'(x)) + g(x) - f(x) = 0$,
d'où pour tout réel x , $2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$.
Donc g est solution de (E') .

Comme nous avons déjà résolu (E) , on obtient alors l'ensemble des solutions de (E') , il suffit de prendre les solutions de (E) et d'ajouter la solution particulière f :

$$\left\{ \psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ae^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) \end{cases}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

EXERCICE 3**SOLUTION**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2(1+2u_n)} - \frac{1+2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{1-2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{\frac{1}{2} - u_n}{1+2u_n}$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $\frac{1}{3} \leq u_0 \leq 1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Ainsi $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$, d'où $\frac{2}{3} \leq 2u_n \leq 2$ puis $\frac{5}{3} \leq 1+2u_n \leq 3$

Par passage à l'inverse (licite car tous les termes sont strictement positifs), $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+2u_n} \leq \frac{3}{5} \leq 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$.

3. Nous avons montré dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+2u_n} \leq \frac{3}{5}$,

donc par la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \frac{1}{2}| = \frac{|\frac{1}{2} - u_n|}{|1+2u_n|} \leq \frac{3}{5} |\frac{1}{2} - u_n| = \frac{3}{5} |u_n - \frac{1}{2}|$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : |u_n - \frac{1}{2}| \leq (\frac{3}{5})^n$

Initialisation : $u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $|u_0 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \leq 1 = (\frac{3}{5})^0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Ainsi $|u_n - \frac{1}{2}| \leq (\frac{3}{5})^n$.

Par la question 3 et par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{5} |u_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{5} (\frac{3}{5})^n = (\frac{3}{5})^{n+1}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \frac{1}{2}| \leq (\frac{3}{5})^n$.

5. Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$, ainsi par le théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \frac{1}{2} = 0$

donc par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

EXERCICE 4

SOLUTION

1. Les triangles ETA et ETB sont rectangles en E donc

$$\tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Par quotient, la fonction \tan est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

On en déduit que la fonction \tan est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Comme $\gamma = \beta - \alpha$, on applique la formule donnée dans l'énoncé :

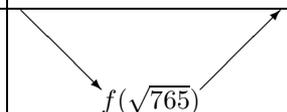
$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \frac{25}{x}} \\ &= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} \\ &= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} \\ &= \frac{5,6x}{x^2 + 765} \end{aligned}$$

4. Comme γ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit par stricte croissance de \tan sur cet intervalle, que γ est maximal si, et seulement si $\tan \gamma$ est maximal. Par passage à l'inverse, $\tan \gamma$ est maximal si, et seulement si $\frac{1}{\tan \gamma}$ est minimal. De plus, comme $5,6 > 0$, $\frac{1}{\tan \gamma}$ est minimal si, et seulement si f est minimale.

f est dérivable sur $]0, 50]$ et pour tout $x \in]0, 50]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{x + \sqrt{765}}{x^2} (x - \sqrt{765})$$

Le signe de $f'(x)$ est alors celui de $x - \sqrt{765}$:

x	0	$\sqrt{765}$	50
$f'(x)$	-	0	+
f			

Le minimum est donc atteint en $x = \sqrt{765}$, soit pour une valeur approchée de x de 28m et pour cette valeur de x , une valeur approchée de l'angle \widehat{ATB} est 0,1 radian.

EXERCICE 5**SOLUTION**

1. On cherche le nombre de codes de 5 chiffres de 0 à 9. Chaque chiffre est donc un entier entre 0 et 9, soit 10 possibilités et ceci se répète 5 fois, donc le nombre total de codes possibles est 10^5 .
2. (a) On peut raisonner chiffre par chiffre. Pour le premier 10 choix sont possibles, puis le deuxième ne pouvant être égal au premier, il n'en reste que 9. Cela donne donc 10×9 possibilités pour les deux premiers chiffres. Puis de la même manière, 8 possibilités pour le troisième chiffre, etc.
Finalement, le nombre de possibilités vaut $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$
- (b) On peut utiliser le complémentaire en utilisant la négation. Ici le complémentaire est donc l'ensemble des codes n'ayant que des chiffres distincts, c'est-à-dire le nombre de codes déterminé à la question précédente. Ainsi le nombre de codes ayant au moins 2 chiffres identiques vaut $10^5 - 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$
- (c) Pour chercher ceux qui ne contiennent ni le 0 ni le 9, on revient au même raisonnement qu'à la question 1, on crée donc des codes de 5 chiffres de 1 à 8, soit 8^5 possibilités.
- (d) De même, on reprend le raisonnement de la question 2a, il y a donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ possibilités.
- (e) En notant A l'ensemble des codes de chiffres distincts (dont le nombre a été déterminé en question 2a), B l'ensemble des codes ne contenant ni le 0 ni le 9 (question 2c), on a alors déterminé le nombre d'éléments de l'ensemble $A \cap B$ dans la question 2d.

Et dans cette question on cherche alors le nombre des éléments de l'ensemble $A \cup B$. Ainsi ce nombre vaut

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 8^5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 56288$$

EXERCICE 6**SOLUTION Partie A**

1.

$$P(E \cap M) = P(E) \times P_E(M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

2. On utilise la formule des probabilités totales sur la partition de l'univers (M, \overline{M}) :

$$P(E) = P(E \cap M) + P(E \cap \overline{M}) = P(E \cap M) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(E) = 0,18 + 0,4 \times 0,55 = 0,4$$

3.

$$P_E(M) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0,18}{0,4} = 0,45$$

Partie B1. Les appels sont effectués de manière identique et indépendante. On reconnaît alors un schéma de Bernoulli. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,15$.

2.

$$P(X = 7) = \binom{80}{7} 0,15^7 (1 - 0,15)^{80-7} \approx 0,038$$

3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \approx 0,999$$

4. On utilise l'espérance $E(X) = np = 12$. En moyenne il réalise 12 souscriptions par jour.