Exercice 1

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

Or la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes, en particulier la tangente u point d'abscisse 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geqslant 0$
Donc par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ et la suite (I_n) est croissante.

2. (a) Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} - x$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geqslant 0, g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} - 1$
D'où le tableau de variations :

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$1 - \ln 2$	$\nearrow$	

Puisque $1 - \ln 2 \geqslant 0$, on obtient alors : pour tout $x \geqslant 0, g(x) \geqslant 0$
D'où pour tout $x \geqslant 0, \mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
D'après la question précédente, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$
Ainsi, par multiplication, $0 \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant 2x\mathrm{e}^{-x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

(c) H est dérivable par produit sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$H'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x\mathrm{e}^{-x}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente :

$$\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^n 2H'(x)\mathrm{d}x = 2(H(n) - H(0)) = 2(1 - (n+1)e^{-n})$$

Or $(n+1)\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$ donc, par la question 2b, $I_n \leqslant 2$.

(e) Nous avons démontré à la question 1 que la suite (I_n) est croissante et à la question 2d, que la suite (I_n) est majorée, donc par le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge.

Exercice 2

Solution

1. L'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$
   Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{array} \right. , a \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Soient $m, p \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$
   alors f est dérivable par produit et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{m}{2}x^2 + (2m - \frac{p}{2})x + p\right)$
   Ainsi, pour tout réel x, $2f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(4mx + 2p)$
   Donc, par identification, f est solution de (E') si, et seulement si $4m = 1$ et $2p = 1$ c'est-à-dire si, et seulement si $m = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$.

   (b) — Supposons que g soit une solution de (E') alors g est dérivable et pour tout réel x, $2g'(x)+g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$.
   Par différence, $g - f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2(g-f)'(x) + (g-f)(x) = 2g'(x) + g(x) - (2f'(x) + f(x)) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) = 0$$

   Donc $g - f$ est solution de (E).

   — Supposons que $g - f$ soit une solution de (E) alors $g - f$ est dérivable et pour tout réel x, $2(g-f)'(x) + (g-f)(x) = 0$
   c'est-à-dire pour tout réel x, $2(g'(x) - f'(x)) + g(x) - f(x) = 0$,
   d'où pour tout réel x, $2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$.
   Donc g est solution de (E').

   Comme nous avons déjà résolu (E), on obtient alors l'ensemble des solutions de (E'), il suffit de prendre les solutions de (E) et d'ajouter la solution particulière f :

$$\left\{ \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}) \end{array} \right. , a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+2u_n} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2(1+2u_n)} - \frac{1+2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{1-2u_n}{2(1+2u_n)} = \frac{\frac{1}{2}-u_n}{1+2u_n}$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$"

   <u>Initialisation :</u> $u_0 = 1$ donc $\frac{1}{3} \leqslant u_0 \leqslant 1$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Ainsi $\frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$, d'où $\frac{2}{3} \leqslant 2u_n \leqslant 2$ puis $\frac{5}{3} \leqslant 1 + 2u_n \leqslant 3$
   Par passage à l'inverse (licite car tous les termes sont strictement positifs), $\frac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+2u_n} \leqslant \frac{3}{5} \leqslant 1$.
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Nous avons montré dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{1+2u_n} \leqslant \dfrac{3}{5}$,
   donc par la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| = \dfrac{\left|\frac{1}{2} - u_n\right|}{|1+2u_n|} \leqslant \frac{3}{5}\left|\frac{1}{2} - u_n\right| = \frac{3}{5}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$"

   <u>Initialisation :</u> $u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\left|u_0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \leqslant 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Ainsi $|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
   Par la question 3 et par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{5}|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \frac{1}{2}| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

5. Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, ainsi par le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{1}{2} = 0$
   donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 4

Solution

1. Les triangles ETA et ETB sont rectangles en E donc

$$\tan\alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \qquad \text{et} \qquad \tan\beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Par quotient, la fonction tan est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

On en déduit que la fonction tan est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Comme $\gamma = \beta - \alpha$, on applique la formule donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\tan\gamma &= \tan(\beta - \alpha) \\
&= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \\
&= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x}\frac{25}{x}} \\
&= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} \\
&= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} \\
&= \frac{5,6x}{x^2 + 765}
\end{aligned}$$

4. Comme γ appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit par stricte croissance de tan sur cet intervalle, que γ est maximal si, et seulement si $\tan\gamma$ est maximal. Par passage à l'inverse, $\tan\gamma$ est maximal si, et seulement si $\dfrac{1}{\tan\gamma}$ est minimal. De plus, comme $5,6 > 0$, $\dfrac{1}{\tan\gamma}$ est minimal si, et seulement si f est minimale.

f est dérivable sur $]0, 50]$ et pour tout $x \in]0, 50]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{x + \sqrt{765}}{x^2}(x - \sqrt{765})$$

Le signe de $f'(x)$ est alors celui de $x - \sqrt{765}$:

x	0		$\sqrt{765}$		50
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\sqrt{765})$	$\nearrow$	

Le minimum est donc atteint en $x = \sqrt{765}$, soit pour une valeur approchée de x de 28m et pour cette valeur de x, une valeur approchée de l'angle $\widehat{ATB}$ est $0,1$ radian.

Exercice 5

Solution

1. On cherche le nombre de codes de 5 chiffres de 0 à 9. Chaque chiffre est donc un entier entre 0 et 9, soit 10 possibilités et ceci se répète 5 fois, donc le nombre total de codes possibles est 10^5.
2. (a) On peut raisonner chiffre par chiffre. Pour le premier 10 choix sont possibles, puis le deuxième ne pouvant être égal au premier, il n'en reste que 9. Cela donne donc 10×9 possibilités pour les deux premiers chiffres. Puis de la même manière, 8 possibilités pour le troisième chiffre, etc.

   Finalement, le nombre de possibilités vaut $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

   (b) On peut utiliser le complémentaire en utilisant la négation. Ici le complémentaire est donc l'ensemble des codes n'ayant que des chiffres distincts, c'est-à-dire le nombre de codes déterminé à la question précédente. Ainsi le nombre de codes ayant au moins 2 chiffres identiques vaut $10^5 - 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

   (c) Pour chercher ceux qui ne contiennent ni le 0 ni le 9, on revient au même raisonnement qu'à la question 1, on crée donc des codes de 5 chiffres de 1 à 8, soit 8^5 possibilités.

   (d) De même, on reprend le raisonnement de la question 2a, il y a donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ possibilités.

   (e) En notant A l'ensemble des codes de chiffres distincts (dont le nombre a été déterminé en question 2a), B l'ensemble des codes ne contenant ni le 0 ni le 9 (question 2c), on a alors déterminé le nombre d'éléments de l'ensemble $A \cap B$ dans la question 2d.

   Et dans cette question on cherche alors le nombre des éléments de l'ensemble $A \cup B$. Ainsi ce nombre vaut

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 8^5 - 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 56288$$

Exercice 6

Solution **Partie A**

1. $$P(E \cap M) = P(E) \times P_E(M) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

2. On utilise la formule des probabilités totales sur la partition de l'univers $(M, \overline{M})$:

$$P(E) = P(E \cap M) + P(E \cap \overline{M}) = P(E \cap M) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(E) = 0,18 + 0,4 \times 0,55 = 0,4$$

3. $$P_E(M) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0,18}{0,4} = 0,45$$

Partie B

1. Les appels sont effectués de manière identique et indépendante. On reconnait alors un schéma de Bernoulli. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,15$.

2. $$P(X = 7) = \binom{80}{7} 0,15^7 (1 - 0,15)^{80-7} \approx 0,038$$

3. $$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \approx 0,999$$

4. On utilise l'espérance $E(X) = np = 12$. En moyenne il réalise 12 souscriptions par jour.